**Introducción a la Serie de Fourier**

Bienvenidos a este curso de 7 semanas en el que estudiaremos los fundamentos básicos para realizar análisis en frecuencia y múltiples aplicaciones en diversos campos de estudio. En esta primera semana estudiaremos la Serie de Fourier conceptualmente y matemáticamente, luego la Transformada de Fourier, incluyendo pares de Fourier y Propiedades de la transformada de Fourier. A continuación estudiaremos la Transformada de Fourier 2D y la Transformada de Fourier Discreta. Finalmente se incluirá un video opcional de notación. En el video de hoy introducimos la Serie de Fourier.

**Serie de Fourier**

La idea fundamental detrás de las Series de Fourier es poder descomponer una señal en componentes más simples, tanto para \*\*analizar\*\* señales como para \*\*sintetizarlas\*\*. Hay varios conceptos e ideas importantes detrás de este tipo de herramienta, que discutimos brevemente a continuación.

La serie de Fourier es una herramienta matemática que nos permite interpretar información de \*\*fenómenos periódicos\*\*. Por lo tanto, para comenzar a entender el análisis de Fourier es esencial entender qué es la periodicidad.

**Periodicidad**

La periodicidad tiene relación con la repetición homogénea de un fenómeno. Es posible observarla en la naturaleza de forma muy clara en eventos como el día y la noche, las estaciones del año, las fases de la luna y las olas del mar. También está presente en la naturaleza de manera menos evidente la periodicidad en el sonido, donde diferentes períodos de una onda sonora se identifican como diferentes tonos; o en la luz, en este contexto diferentes períodos en una onda electromagnética se traducen como diferentes colores.

Llamaremos período al espacio homogéneo entre eventos que se repiten. Por ejemplo, los ciclos de la luna se repiten cada 28 días, por lo que diremos que tiene período 28 dias. Por otro lado, las ondas luminosas de color rojo repiten sus ciclos cada 550 nm por lo que diremos que ese es su período.

Funciones periódicas

Típicamente los fenómenos del mundo real se modelan mediante funciones. Una función es periódica de período $\tau$, cumple con

Esto implica que la función se repite en forma exacta cada cierta unidad de la variable independiente.

\*\*Ejemplo\*\*

El clásico ejemplo de una señal periódica es una sinusoide

Sabemos que:

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Continuando con el ejemplo anterior, a continuación es posible observar cómo cambia una sinusoide cuando su período τ aumenta.

Importante: el período siempre es una cantidad positiva.

**Concepto de frecuencia**

"Frecuencia Fundamental"

Definiremos la frecuencia fundamental como el inverso multiplicativo del período.

Esta se mide entonces en unidades del inverso de las unidades del período.

Por ejemplo:

Frecuencia temporal:

si el tiempo se mide en segundos:

La unidad de frecuencia temporal f=1/s se denomina \*\*Hertz\*\*.

Frecuencia espacial:

si el espacio se mide en metros:

**Frecuencia y Serie de Fourier**

La serie de Fourier permite identificar el peso de cada una de las frecuencias que componen un fenómeno periódico.

¿Cómo es posible que un fenómeno periódico tenga más de una frecuencia si la frecuencia es el inverso del período? Esto tiene que ver con la \*\*base\*\* que usa las series de Fourier, que son las \*\*sinusoides\*\*. En 1807 Jean Bapiste Joseph Fourier demostró que \*\*todas las funciones periódicas se pueden escribir como una suma infinita de sinusoides de diferentes frecuencias y amplitudes\*\*. Esto significa que es posible representar una función periódica como una suma de senos y cosenos, donde el \*peso\* de cada frecuencia es la \*amplitud\* de la sinusoide que tiene dicha \*frecuencia\*.

¿Por qué sinusoides? Esta pregunta será resuelta en profundidad en el siguiente video. Sin embargo podemos decir que las sinusoides constituyen una base ortonormal del espacio de funciones periódicas. La idea de usar señales periódicas tiene que ver con utilizar funciones simples, como los senos o cosenos para modelar señales más complicadas. En muchas aplicaciones prácticas, nos interesa concentrarnos en un intervalo acotado de una señal, y no nos interesa como sea la señal fuera de ese intervalo. Si tenemos herramientas útiles para analizar señales periódicas, y consideramos su período como el intervalo de interés, podemos utilizar estas herramientas para entender el comportamiento de la señal en ese intervalo.

**Armónicos**

Analizando la definición de la Serie de Fourier, es claro que, si bien se necesitan infinitas sinusoides para representar una señal periódica, cada una de una frecuencia en particular, \*\*no son necesarias todas las frecuencias\*\*, si no solo algunas. Estas frecuencias están relacionadas con el período de la señal.

Dado un período T, la frecuencia fundamental es

Frecuencia fundamental

Dada una señal periódica, vemos que las frecuencias contenidas en su expansión en Series de Fourier son:

Imagen que contiene Carta

Descripción generada automáticamente

Como todas estas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, se denominan armónicos

**Implementación computacional**

Obviamente, en un computador no es posible calcular numéricamente una suma infinita. Veamos que tan buena es esta expansión para un número finito de términos.

A continuación se muestra el resultado de sumar sinusoides formar una onda cuadrada de período 2L

Observación

Como se observa en la figura, vemos que a medida que agregamos términos, la aproximación mejora. Sin embargo, para un número finito de términos, la Serie de Fourier no converge de la misma manera para todos los puntos, es decir, no hay convergencia uniforme. Cada punto en particular oscila en torno al punto de convergencia a medida que N tiende a infinito. Dicho en otras palabras, no todos los puntos convergen a la misma velocidad. Esto se conoce como el fenómeno de Gibbs. Estas oscilaciones nunca desaparecen, salvo en el infinito. En las discontinuidades no hay convergencia punto a punto, pero sí converge a un límite, que no es el valor de la discontinuidad ese punto.

Fenómeno de Gibbs

Desde el punto de vista del análisis de señales, el fenómeno de Gibbs es la respuesta al escalón de un filtro pasabajos, y las oscilaciones se llaman artefactos. Esto sucede al truncar la Transformada de Fourier de una señal real, o la Serie de Fourier de una señal periódica. Esto se puede representar como una convolución de la señal original con la respuesta al impulso del filtro, que en este caso es una función sinc. Por lo tanto, el fenómeno de Gibbs puede verse como el resultado de una función escalón (si no se requiere periodicidad) o una onda cuadrada (si es periódica) convolucionada con una función sinc: las oscilaciones en la función sinc causan estas perturbaciones oscilatorias en la salida.